

УДК 517.3, 517.6

doi: 10.21685/2072-3040-2024-3-1

Система сингулярных интегральных уравнений в задаче об электромагнитных колебаниях диэлектрического шара, покрытого графеном

Ю. Г. Смирнов¹, О. В. Кондырев²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹mmm@pnzgu.ru, ²kow20002204@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Краевые задачи сопряжения для системы уравнений Максвелла являются основными в электродинамике. В последнее время возник интерес к задачам, подразумевающим наличие тонкого слоя графена на поверхности, который меняет условия сопряжения. Целью работы является получение системы интегральных уравнений для векторной краевой задачи об электромагнитных колебаниях диэлектрического шара, покрытого графеном, в сферической системе координат. *Материалы и методы.* С помощью формул Стрэттона – Чу выражаются компоненты поля через поверхностные токи и используются условия сопряжения для получения сингулярных интегральных уравнений на поверхности шара. *Результаты.* Получена система сингулярных интегральных уравнений с четырьмя неизвестными скалярными функциями на поверхности шара. Изучены свойства системы интегральных уравнений. *Вывод.* Полученную систему сингулярных интегральных уравнений можно решать численно известными методами, например методом Галеркина или методом коллокации.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, нелинейность Керра, уравнения Максвелла, диэлектрическое тело, графен

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20087).

Для цитирования: Смирнов Ю. Г., Кондырев О. В. Система сингулярных интегральных уравнений в задаче об электромагнитных колебаниях диэлектрического шара, покрытого графеном // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 3. С. 3–17. doi: 10.21685/2072-3040-2024-3-1

System of singular integral equations in the problem of electromagnetic oscillations of a graphene-coated dielectric ball

Yu.G. Smirnov¹, O.V. Kondyrev²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹mmm@pnzgu.ru, ²kow20002204@mail.ru

Abstract. *Background.* Boundary value transmission problems for a system of Maxwell's equations are fundamental in electrodynamics. Recently, there has been interest in problems

involving the presence of a thin layer of graphene on the surface, which changes the coupling conditions. The purpose of the study is to obtain a system of integral equations for the vector boundary value problem of electromagnetic oscillations of a dielectric ball coated with graphene in a spherical coordinate system. *Materials and methods.* Using the Stratton-Chu formula, the components of the field are expressed in terms of surface currents and transmission conditions are used to obtain singular integral equations on the surface of the ball. *Results.* A system of singular integral equations with 4 unknown scalar functions on the surface of the sphere is obtained. The properties of the system of integral equations are studied. *Conclusions.* The resulting system of singular integral equations can be solved numerically by known methods, for example, the Galerkin method or the collocation method.

Keywords: singular integral equations, Kerr nonlinearity, Maxwell equations, dielectric body, graphene

Financing: the research was financed by the Russian Science Foundation (project No. 20-11-20087).

For citation: Smirnov Yu.G., Kondyrev O.V. System of singular integral equations in the problem of electromagnetic oscillations of a graphene-coated dielectric ball. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;(3):3–17. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-3-1

Введение

Краевые задачи сопряжения для уравнений Максвелла играют важную роль в электродинамике, особенно в задачах дифракции электромагнитных волн на диэлектриках и в исследовании собственных колебаний в системах диэлектрических тел.

Хотя задачи сопряжения достаточно хорошо изучены [1–5], сейчас стали исследоваться краевые задачи со специальными условиями сопряжения, допускающими наличие тонкого слоя материала (например, графена) на границе раздела сред [6–13]. В некоторых случаях требуется учитывать нелинейность условий сопряжения (в силу нелинейности графена в инфракрасном и терагерцовом диапазонах частот), что приводит к новому классу задач сопряжения, методы решения которых пока не разработаны.

В качестве метода решения исследования задачи об электромагнитных колебаниях диэлектрического шара, покрытого графеном, выбран метод интегральных уравнений, который сводит краевую задачу к системе интегральных уравнений по поверхности шара. Этот подход позволяет использовать численные методы для поиска решения и допускает эффективное распараллеливание для решения на суперкомпьютерах.

В статье рассмотрена векторная задача сопряжения об электромагнитных колебаниях диэлектрического шара с графеновым покрытием и получена система скалярных сингулярных интегральных уравнений по поверхности шара в сферических координатах.

1. Постановка задачи

Рассмотрим ограниченную область $\Omega_1 \in \mathbb{R}^3$, которая является шаром с границей Γ . Эта область заполнена средой, которая имеет значения диэлектрической и магнитной проницаемостей ϵ_1, μ_1 . Область вне шара $\Omega_2 := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_1$ заполнена средой со значениями ϵ_2, μ_2 . Предполагается, что $\epsilon_i > 0$ и $\mu_i > 0$.

Электромагнитное поле $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ в области Ω_1 представим как $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$, а в области Ω_2 – как $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$. Для определения указанных компонент необходимо решить систему уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = -i\omega\epsilon_1 \mathbf{E}_1 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = i\omega\mu_1 \mathbf{H}_1 \end{cases} \text{ в } \Omega_1, \quad (1)$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = -i\omega\epsilon_2 \mathbf{E}_2 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = i\omega\mu_2 \mathbf{H}_2 \end{cases} \text{ в } \Omega_2, \quad (2)$$

где ω – круговая частота.

На границе Γ должны выполняться условия сопряжения:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{\Gamma} &= \sigma \mathbf{E}_{\tau}, \\ [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]_{\Gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $[\cdot]_{\Gamma}$ означает разность следов функции с разных сторон Γ ; $\mathbf{v}$ – вектор нормали к границе Γ , направленный в область Ω_2 ; индекс τ означает взятие касательных компонент; $(\times)$ – векторное произведение; σ – нелинейная проводимость графена [14, 15], выраженная законом Керра:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_3 |E_{\tau}|^2. \quad (4)$$

В статье мы будем считать, что $\sigma_1 \neq 0$ и, вообще говоря, $\sigma_3 \neq 0$, т.е. будем рассматривать и линейный, и нелинейный случаи.

На бесконечности должны выполняться условия:

$$(\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_2) + \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} (\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}_2)) = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где $\mathbf{e}_r$ – вектор нормали к единичной сфере, $r := |x|$ и $x = (x_1, x_2, x_3)$.

2. Система интегро-дифференциальных уравнений

С помощью формул Стрэттона – Чу запишем компоненты поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ через комбинацию поверхностных электрических и магнитных токов. Здесь и далее $x \in \Gamma$

В области Ω_1 компоненты примут вид [4, с. 124]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{1}{i\omega\epsilon_1} \int_{\Gamma} \Phi_1(x, y) (\mathbf{v}(y) \times \mathbf{H}_1(y)) ds(y) - \\ &\quad - \operatorname{rot} \int_{\Gamma} \Phi_1(x, y) (\mathbf{v}(y) \times \mathbf{E}_1(y)) ds(y), \\ \mathbf{H}_1 &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{1}{i\omega\mu_1} \int_{\Gamma} \Phi_1(x, y) (\mathbf{v}(y) \times \mathbf{E}_1(y)) ds(y) - \end{aligned}$$

$$-\operatorname{rot} \int_{\Gamma} \Phi_1(x, y)(\mathbf{v}(y) \times \mathbf{H}_1(y)) ds(y), \quad (6)$$

где $x \in \Omega_1$; а в области Ω_2 [4, с. 128]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{1}{i\omega\epsilon_2} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y)(\mathbf{v}(y) \times \mathbf{H}_2(y)) ds(y) + \\ &+ \operatorname{rot} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y)(\mathbf{v}(y) \times \mathbf{E}_2(y)) ds(y), \\ \mathbf{H}_2 &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{1}{i\omega\mu_2} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y)(\mathbf{v}(y) \times \mathbf{E}_2(y)) ds(y) + \\ &+ \operatorname{rot} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y)(\mathbf{v}(y) \times \mathbf{H}_2(y)) ds(y), \end{aligned} \quad (7)$$

где $x \in \Omega_2$,

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= \frac{e^{ik_1|x-y|}}{4\pi|x-y|}, k_1^2 = \omega^2\epsilon_1\mu_1, \\ \Phi_2(x, y) &= \frac{e^{ik_2|x-y|}}{4\pi|x-y|}, k_2^2 = \omega^2\epsilon_2\mu_2. \end{aligned}$$

Перейдем к токам, для этого выполним замену:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &= \mathbf{v} \times \mathbf{H}_1, \mathbf{m}_1 = \mathbf{v} \times \mathbf{E}_1, \\ \mathbf{j}_2 &= \mathbf{v} \times \mathbf{H}_2, \mathbf{m}_2 = \mathbf{v} \times \mathbf{E}_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Перепишем условия (3) с учетом замены (8), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1 &= \sigma \mathbf{E}_\tau, \\ \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Исходя из условий (10) неизвестные $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ можно выразить через $\mathbf{j}$ и $\mathbf{m}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1 &= \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}, \\ \mathbf{j}_1 &= \mathbf{j}, \mathbf{j}_2 = \mathbf{j}_1 + \sigma(\mathbf{m} \times \mathbf{v}) = \mathbf{j} + \sigma(\mathbf{m} \times \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (10)$$

Перепишем (6) и (7) с заменой (8) и (10), тем самым перейдем к системе уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{1}{i\omega\epsilon_1} \int_{\Gamma} \Phi_1(x, y)\mathbf{j}(y) ds(y) - \operatorname{rot} \int_{\Gamma} \Phi_1(x, y)\mathbf{m}(y) ds(y), \\ \mathbf{H}_1 &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{1}{i\omega\mu_1} \int_{\Gamma} \Phi_1(x, y)\mathbf{m}(y) ds(y) - \operatorname{rot} \int_{\Gamma} \Phi_1(x, y)\mathbf{j}(y) ds(y); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_2 &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{1}{i\omega\epsilon_2} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y) (\mathbf{j}(y) + \sigma(\mathbf{m}(y) \times \mathbf{v}(y))) ds(y) + \\
&\quad + \operatorname{rot} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y) \mathbf{m}(y) ds(y), \\
\mathbf{H}_2 &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{1}{i\omega\mu_2} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y) \mathbf{m}(y) ds(y) + \\
&\quad + \operatorname{rot} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y) (\mathbf{j}(y) + \sigma(\mathbf{m}(y) \times \mathbf{v}(y))) ds(y). \tag{12}
\end{aligned}$$

Сформируем систему интегро-дифференциальных уравнений, для этого подставим выражения полей (11) и (12) в условия сопряжения на границе (3):

$$\begin{aligned}
&-\mathbf{v}(x) \times \operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x \int_{\Gamma} \left(\frac{\Phi_1(x, y)}{i\omega\epsilon_1} + \frac{\Phi_2(x, y)}{i\omega\epsilon_2} \right) \mathbf{j}(y) ds(y) - \\
&-\mathbf{v}(x) \times \operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x \int_{\Gamma} \frac{\Phi_2(x, y)}{i\omega\epsilon_2} \sigma(\mathbf{m}(y) \times \mathbf{v}(y)) ds(y) + \\
&+\mathbf{v}(x) \times \operatorname{rot}_x \int_{\Gamma} (\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y)) \mathbf{m}(y) ds(y) = 0, \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}(x) \times \operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x \int_{\Gamma} \left(\frac{\Phi_1(x, y)}{i\omega\mu_1} + \frac{\Phi_2(x, y)}{i\omega\mu_2} \right) \mathbf{m}(y) ds(y) + \\
&+\mathbf{v}(x) \times \operatorname{rot}_x \int_{\Gamma} (\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y)) \mathbf{j}(y) + \\
&+\mathbf{v}(x) \times \operatorname{rot}_x \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y) \sigma(\mathbf{m}(y) \times \mathbf{v}(y)) = \sigma(\mathbf{m}(x) \times \mathbf{v}(x)). \tag{14}
\end{aligned}$$

Система (13)–(14) является системой гиперсингулярных уравнений. Нашей дальнейшей целью является понижение порядка сингулярности системы и переход к сингулярным уравнениям.

Система (13)–(14) была подробно исследована в [16]. В частности, были выбраны пространства, в которых действует оператор системы уравнений, доказаны фредгольмовость и непрерывная обратимость (при некоторых условиях на параметры задачи) оператора системы (13)–(14). Здесь мы не будем повторять эти результаты, а ниже представим переход к эквивалентной системе сингулярных уравнений, более удобной для численного решения.

3. Система сингулярных интегральных уравнений

Для упрощения векторных выражений с помощью уравнения Гельмгольца $((\Delta + k^2)G_i = 0$ в области Ω_i) операцию взятия двойного ротора можно преобразовать по следующей схеме:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta = \operatorname{grad} \operatorname{div} + k^2. \quad (15)$$

После упрощения перенесем операцию дивергенции на функции токов (см. [17, с. 92–93]), получим

$$\begin{aligned} & -\operatorname{grad}_{\operatorname{Tx}} \int_{\Gamma} \left(\frac{\Phi_1(x, y)}{i\omega\epsilon_1} + \frac{\Phi_2(x, y)}{i\omega\epsilon_2} \right) \operatorname{Div}_y \mathbf{j}(y) dy - \\ & - \int_{\Gamma} \left(k_1^2 \Phi_1(x, y) + k_2^2 \Phi_2(x, y) \right) \mathbf{j}(y) dy - \\ & - \operatorname{grad}_{\operatorname{Tx}} \int_{\Gamma} \frac{\Phi_2(x, y)}{i\omega\epsilon_2} \operatorname{Div}_y (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{m}(y) \times \mathbf{v}(y)) dy + \\ & + \operatorname{rot}_{\operatorname{Tx}} \int_{\Gamma} (\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y)) \mathbf{m}(y) dy = 0, \quad (16) \\ & -\operatorname{grad}_{\operatorname{Tx}} \int_{\Gamma} \left(\frac{\Phi_1(x, y)}{i\omega\mu_1} + \frac{\Phi_2(x, y)}{i\omega\mu_2} \right) \operatorname{Div}_y \mathbf{m}(y) dy + \\ & + \int_{\Gamma} \left(k_1^2 \Phi_1(x, y) + k_2^2 \Phi_2(x, y) \right) \mathbf{m}(y) dy + \operatorname{rot}_{\operatorname{Tx}} \int_{\Gamma} (\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y)) \mathbf{j}(y) dy + \\ & + \operatorname{rot}_{\operatorname{Tx}} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y) (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{m}(y) \times \mathbf{v}(y)) dy = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{m}(x) \times \mathbf{v}(x). \quad (17) \end{aligned}$$

Так как в рассматриваемой задаче мы решаем задачу на сфере, то в дальнейшем будут использоваться операции в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} F_x &= \hat{F}_\rho \sin \theta \cos \varphi + \hat{F}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \hat{F}_\varphi \sin \theta, \\ F_y &= \hat{F}_\rho \sin \theta \sin \varphi + \hat{F}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \hat{F}_\varphi \cos \theta, \\ F_z &= \hat{F}_\rho \cos \theta - \hat{F}_\theta \sin \theta. \end{aligned}$$

Запишем результат векторного произведения касательного на нормальный вектор, который потребуется далее

$$\begin{aligned} a &= (a_\rho = 0, a_\theta, a_\varphi); \\ n_\rho &= (1, 0, 0); \\ a \times n_\rho &= (0, a_\varphi, -a_\theta). \end{aligned} \quad (18)$$

Для дальнейшего численного решения удобно привести векторную систему к скалярным уравнениям. Сначала запишем дивергенцию в сферической системе координат [18]:

$$-\operatorname{grad}_{\operatorname{Tx}} \int_{\Gamma} \left(\frac{\Phi_1(x, y)}{i\omega\epsilon_1} + \frac{\Phi_2(x, y)}{i\omega\epsilon_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (j_\theta(y) \sin \theta_y) + \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial j_\varphi(y)}{\partial \varphi} \right) dy -$$

$$-\int_{\Gamma} \left(k_1^2 \Phi_1(x, y) + k_2^2 \Phi_2(x, y) \right) \mathbf{j}(y) dy - \text{grad}_{\text{tx}} \int_{\Gamma} \frac{\Phi_2(x, y)}{i\omega\epsilon_2} \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (\sigma m_{\phi}(y) \sin \theta_y) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial \sigma m_{\theta}(y)}{\partial \phi} \right) dy + \text{rot}_{\text{tx}} \int_{\Gamma} (\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y)) \mathbf{m}(y) dy = 0, \quad (19)$$

$$- \text{grad}_{\text{tx}} \int_{\Gamma} \left(\frac{\Phi_1(x, y)}{i\omega\mu_1} + \frac{\Phi_2(x, y)}{i\omega\mu_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (m_{\theta}(y) \sin \theta_y) + \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial m_{\phi}(y)}{\partial \phi} \right) dy + \\ + \int_{\Gamma} \left(k_1^2 \Phi_1(x, y) + k_2^2 \Phi_2(x, y) \right) \mathbf{m}(y) dy + \text{rot}_{\text{tx}} \int_{\Gamma} (\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y)) \mathbf{j}(y) dy + \\ + \text{rot}_{\text{tx}} \int_{\Gamma} \Phi_2(x, y) (\sigma \mathbf{m}(y) \times \mathbf{v}(y)) dy = \sigma \mathbf{m}(x) \times \mathbf{v}(x). \quad (20)$$

Далее запишем в сферической системе координат градиент [18] и внесем дифференциальные операции под интеграл. Производные функции ядра $\Phi(x, y)$ в точке x можно вычислить аналитически. Введем обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial \phi_x} \Phi_k(x, y) = G_{k, \phi_x}(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial \theta_x} \Phi_k(x, y) = G_{k, \theta_x}(x, y). \quad (21)$$

В итоге получим следующую систему уравнений:

$$-\frac{1}{r_x} \int_{\Gamma} \left(\frac{G_{1, \theta_x}(x, y)}{i\omega\epsilon_1} + \frac{G_{2, \theta_x}(x, y)}{i\omega\epsilon_2} \right) \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_y} (j_{\theta}(y) \sin \theta_y) + \frac{\partial j_{\phi}(y)}{\partial \phi} \right) dy \mathbf{I}_{\theta}(x) - \\ - \frac{1}{r_x \sin \theta_x} \int_{\Gamma} \left(\frac{G_{1, \phi_x}(x, y)}{i\omega\epsilon_1} + \frac{G_{2, \phi_x}(x, y)}{i\omega\epsilon_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (j_{\theta}(y) \sin \theta_y) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial j_{\phi}(y)}{\partial \phi} \right) dy \mathbf{I}_{\phi}(x) - \int_{\Gamma} \left(k_1^2 \Phi_1(x, y) + k_2^2 \Phi_2(x, y) \right) \mathbf{j}(y) dy - \\ - \frac{1}{r_x} \int_{\Gamma} \frac{G_{2, \theta_x}(x, y)}{i\omega\epsilon_2} \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (\sigma m_{\phi}(y) \sin \theta_y) - \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial \sigma m_{\theta}(y)}{\partial \phi} \right) dy \mathbf{I}_{\theta}(x) - \\ - \frac{1}{r_x \sin \theta_x} \int_{\Gamma} \frac{G_{2, \phi_x}(x, y)}{i\omega\epsilon_2} \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (\sigma m_{\phi}(y) \sin \theta_y) - \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial \sigma m_{\theta}(y)}{\partial \phi} \right) dy \mathbf{I}_{\phi}(x) - \\ - \int_{\Gamma} \text{rot}_{\text{tx}} \{ (\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y)) \mathbf{m}(y) \} dy = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{r_x} \int_{\Gamma} \left(\frac{G_{1,\theta_x}(x,y)}{i\omega\mu_1} + \frac{G_{2,\theta_x}(x,y)}{i\omega\mu_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (m_{\theta}(y) \sin \theta_y) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial m_{\phi}(y)}{\partial \phi} \right) dy \mathbf{I}_{\theta}(x) - \frac{1}{r_x \sin \theta_x} \int_{\Gamma} \left(\frac{G_{1,\phi_x}(x,y)}{i\omega\mu_1} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{G_{2,\phi_x}(x,y)}{i\omega\mu_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (m_{\theta}(y) \sin \theta_y) + \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial m_{\phi}(y)}{\partial \phi} \right) dy \mathbf{I}_{\phi}(x) + \\
 & + \int_{\Gamma} \left(k_1^2 \Phi_1(x,y) + k_2^2 \Phi_2(x,y) \right) \mathbf{m}(y) dy + \int_{\Gamma} \text{rot}_{\text{тх}} \{ (\Phi_1(x,y) + \Phi_2(x,y)) \mathbf{j}(y) \} dy + \\
 & + \int_{\Gamma} \text{rot}_{\text{тх}} \{ \Phi_2(x,y) (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{m}(y) \times \mathbf{v}(y)) \} dy = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{m}(x) \times \mathbf{v}(x). \quad (23)
 \end{aligned}$$

В уравнениях присутствует ротор, действующий на произведение вектора и скаляра, причем дифференцирование происходит по переменной, от которой зависит скаляр. Такое выражение можно упростить [18, с. 172]:

$$\text{rot}_x(\Phi(x,y)\mathbf{m}(y)) = \text{grad}_x(\Phi(x,y)) \times \mathbf{m}(y). \quad (24)$$

Так как целью является получение скалярной системы, запишем градиент из равенства (24) и подставим полученное выражение в (22) и (23):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{r_x} \int_{\Gamma} \left(\frac{G_{1,\theta_x}(x,y)}{i\omega\epsilon_1} + \frac{G_{2,\theta_x}(x,y)}{i\omega\epsilon_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (j_{\theta}(y) \sin \theta_y) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial j_{\phi}(y)}{\partial \phi} \right) dy \mathbf{I}_{\theta}(x) - \frac{1}{r_x \sin \theta_x} \int_{\Gamma} \left(\frac{G_{1,\phi_x}(x,y)}{i\omega\epsilon_1} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{G_{2,\phi_x}(x,y)}{i\omega\epsilon_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (j_{\theta}(y) \sin \theta_y) + \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial j_{\phi}(y)}{\partial \phi} \right) dy \mathbf{I}_{\phi}(x) - \\
 & \quad - \int_{\Gamma} \left(k_1^2 \Phi_1(x,y) + k_2^2 \Phi_2(x,y) \right) \mathbf{j}(y) dy - \\
 & - \frac{1}{r_x} \int_{\Gamma} \frac{G_{2,\theta_x}(x,y)}{i\omega\epsilon_2} \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (\boldsymbol{\sigma} m_{\phi}(y) \sin \theta_y) - \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} m_{\theta}(y)}{\partial \phi} \right) dy \mathbf{I}_{\theta}(x) - \\
 & \quad - \frac{1}{r_x \sin \theta_x} \int_{\Gamma} \frac{G_{2,\phi_x}(x,y)}{i\omega\epsilon_2} \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (\boldsymbol{\sigma} m_{\phi}(y) \sin \theta_y) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} m_{\theta}(y)}{\partial \phi} \right) dy \mathbf{I}_{\phi}(x) + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{r_x} \frac{\partial}{\partial \theta_x} (\Phi_1(x,y) + \Phi_2(x,y)) \mathbf{I}_{\theta}(x) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r_x \sin \theta_x} \frac{\partial}{\partial \phi_x} (\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y)) \mathbf{I}_\phi(x) \Big\} \times \mathbf{m}(y) dy = 0, \quad (25) \\
& - \frac{1}{r_x} \int_{\Gamma} \left(\frac{G_{1,\theta_x}(x, y)}{i\omega\mu_1} + \frac{G_{2,\theta_x}(x, y)}{i\omega\mu_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (m_\theta(y) \sin \theta_y) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial m_\phi(y)}{\partial \phi} \right) dy \mathbf{I}_\theta(x) - \frac{1}{r_x \sin \theta_x} \int_{\Gamma} \left(\frac{G_{1,\phi_x}(x, y)}{i\omega\mu_1} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{G_{2,\phi_x}(x, y)}{i\omega\mu_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (m_\theta(y) \sin \theta_y) + \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial m_\phi(y)}{\partial \phi} \right) dy \mathbf{I}_\phi(x) + \\
& + \int_{\Gamma} \left(k_1^2 \Phi_1(x, y) + k_2^2 \Phi_2(x, y) \right) \mathbf{m}(y) dy + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{r_x} \frac{\partial}{\partial \theta_x} (\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y)) \mathbf{I}_\theta(x) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{r_x \sin \theta_x} \frac{\partial}{\partial \phi_x} (\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y)) \mathbf{I}_\phi(x) \right\} \times \mathbf{j}(y) dy + \\
& + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{r_x} \frac{\partial}{\partial \theta_x} \Phi_2(x, y) \mathbf{I}_\theta(x) + \frac{1}{r_x \sin \theta_x} \frac{\partial}{\partial \phi_x} \Phi_2(x, y) \mathbf{I}_\phi(x) \right\} (m_\phi(y) \mathbf{I}_\theta(y) - \\
& \quad - m_\theta(y) \mathbf{I}_\phi(y)) \sigma dy = \frac{\sigma}{2} (m_\phi(x) \mathbf{I}_\theta(x) - m_\theta(x) \mathbf{I}_\phi(x)). \quad (26)
\end{aligned}$$

$\mathbf{I}_\theta(x)$ и $\mathbf{I}_\phi(x)$ представляют собой единичные векторы, которые образуют базис на поверхности в точке x .

Физические координаты вектора запишем следующим образом [18, с. 187]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_\rho(x) &= (\sin(\theta_x) \cos(\phi_x), \sin(\theta_x) \sin(\phi_x), \cos(\theta_x)), \\
\mathbf{I}_\theta(x) &= (\cos(\theta_x) \cos(\phi_x), \cos(\theta_x) \sin(\phi_x), -\sin(\theta_x)), \\
\mathbf{I}_\phi(x) &= (-\sin(\phi_x), \cos(\phi_x), 0). \quad (27)
\end{aligned}$$

Тогда скалярное произведение в разных точках на поверхности сферы имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_\theta(y) \mathbf{I}_\rho(x) &= \cos(\theta_y) \sin(\theta_x) \cos(\phi_y - \phi_x) - \sin(\theta_y) \cos(\theta_x); \\
\mathbf{I}_\theta(y) \mathbf{I}_\theta(x) &= \cos(\theta_y) \cos(\theta_x) \cos(\phi_y - \phi_x) + \sin(\theta_y) \sin(\theta_x); \\
\mathbf{I}_\theta(y) \mathbf{I}_\phi(x) &= \cos(\theta_y) \sin(\phi_y - \phi_x); \\
\mathbf{I}_\phi(y) \mathbf{I}_\rho(x) &= \sin(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y); \\
\mathbf{I}_\phi(y) \mathbf{I}_\theta(x) &= \cos(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y); \\
\mathbf{I}_\phi(y) \mathbf{I}_\phi(x) &= \cos(\phi_y - \phi_x). \quad (28)
\end{aligned}$$

Выпишем вспомогательные формулы, которые потребуются далее:

$$\begin{aligned} & (f_1(x, y)\mathbf{I}_\theta(x) + f_2(x, y)\mathbf{I}_\phi(x)) \times \mathbf{m}(y) \cdot \mathbf{I}_\theta(x) = \\ & = f_1(x, y)\mathbf{I}_\theta(x) \times \mathbf{m}(y) \cdot \mathbf{I}_\theta(x) + f_2(x, y)\mathbf{I}_\phi(x) \times \mathbf{m}(y) \cdot \mathbf{I}_\theta(x) = \\ & = f_2(x, y)\mathbf{I}_\phi(x) \times \mathbf{m}(y) \cdot \mathbf{I}_\theta(x) = \mathbf{I}_\theta(x) \times f_2(x, y)\mathbf{I}_\phi(x) \cdot \mathbf{m}(y) = \\ & = f_2(x, y)\mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{m}(y), \end{aligned} \quad (29)$$

$$(f_1(x, y)\mathbf{I}_\theta(x) + f_2(x, y)\mathbf{I}_\phi(x)) \times \mathbf{m}(y) \cdot \mathbf{I}_\phi(x) = -f_1(x, y)\mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{m}(y). \quad (30)$$

Наконец, в целях формирования скалярной системы уравнений умножим (25) и (26) на $\mathbf{I}_\theta(x)$ и $\mathbf{I}_\phi(x)$. Воспользуемся (29)–(30) и формулами (28), в результате получим систему из четырех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{r_x} \int_{\Gamma} \left(\frac{G_{1,\theta_x}(x, y)}{i\omega\epsilon_1} + \frac{G_{2,\theta_x}(x, y)}{i\omega\epsilon_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (j_\theta(y) \sin \theta_y) + \right. \\ & + \left. \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial j_\phi(y)}{\partial \phi} \right) dy - \int_{\Gamma} \left(k_1^2 \Phi_1(x, y) + k_2^2 \Phi_2(x, y) \right) \times \left(\left\{ \cos \theta_y \cos \theta_x \cos(\phi_y - \phi_x) + \right. \right. \\ & + \left. \left. \sin(\theta_y) \sin(\theta_x) \right\} j_\theta(y) + \cos(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y) j_\phi(y) \right) dy - \\ & - \frac{1}{r_x} \int_{\Gamma} \frac{G_{2,\theta_x}(x, y)}{i\omega\epsilon_2} \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (\sigma m_\phi(y) \sin \theta_y) - \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial \sigma m_\theta(y)}{\partial \phi} \right) dy + \\ & + \int_{\Gamma} \frac{1}{r_x \sin \theta_x} (G_{1,\phi_x}(x, y) + G_{2,\phi_x}(x, y)) \times \left(\left\{ \cos(\theta_y) \sin(\theta_x) \cos(\phi_y - \phi_x) - \right. \right. \\ & - \left. \left. \sin(\theta_y) \cos(\theta_x) \right\} m_\theta(y) + \sin(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y) m_\phi(y) \right) dy = 0, \quad (31) \\ & - \frac{1}{r_x \sin \theta_x} \int_{\Gamma} \left(\frac{G_{1,\phi_x}(x, y)}{i\omega\epsilon_1} + \frac{G_{2,\phi_x}(x, y)}{i\omega\epsilon_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (j_\theta(y) \sin \theta_y) + \right. \\ & + \left. \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial j_\phi(y)}{\partial \phi} \right) dy - \int_{\Gamma} \left(k_1^2 \Phi_1(x, y) + k_2^2 \Phi_2(x, y) \right) \left(\left\{ \cos \theta_y \sin(\phi_y - \phi_x) \right\} j_\theta(y) + \right. \\ & + \left. \cos(\phi_y - \phi_x) j_\phi(y) \right) dy - \frac{1}{r_x \sin \theta_x} \int_{\Gamma} \frac{G_{2,\phi_x}(x, y)}{i\omega\epsilon_2} \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (\sigma m_\phi(y) \sin \theta_y) - \right. \\ & - \left. \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial \sigma m_\theta(y)}{\partial \phi} \right) dy - \int_{\Gamma} \frac{1}{r_x} (G_{1,\theta_x}(x, y) + \\ & + G_{2,\theta_x}(x, y)) \left(\left\{ \cos(\theta_y) \sin(\theta_x) \cos(\phi_y - \phi_x) - \sin(\theta_y) \cos(\theta_x) \right\} m_\theta(y) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y) m_\phi(y) dy = 0, \quad (32) \\
& - \frac{1}{r_x} \int_{\Gamma} \left(\frac{G_{1,\theta_x}(x,y)}{i\omega\mu_1} + \frac{G_{2,\theta_x}(x,y)}{i\omega\mu_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (m_\theta(y) \sin \theta_y) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial m_\phi(y)}{\partial \phi} \right) dy + \int_{\Gamma} \left(k_1^2 \Phi_1(x,y) + \right. \\
& \quad \left. + k_2^2 \Phi_2(x,y) \right) \left(\left\{ \cos(\theta_y) \cos(\theta_x) \cos(\phi_y - \phi_x) + \sin(\theta_y) \sin(\theta_x) \right\} m_\theta(y) + \right. \\
& \quad \left. + \cos(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y) m_\phi(y) \right) dy + \int_{\Gamma} \frac{1}{r_x \sin \theta_x} \left(G_{1,\phi_x}(x,y) + \right. \\
& \quad \left. + G_{2,\phi_x}(x,y) \right) \left(\left\{ \cos(\theta_y) \sin(\theta_x) \cos(\phi_y - \phi_x) - \sin(\theta_y) \cos(\theta_x) \right\} j_\theta(y) + \right. \\
& \quad \left. + \sin \theta_x \sin(\phi_x - \phi_y) j_\phi(y) \right) dy + \int_{\Gamma} \frac{1}{r_x \sin \theta_x} G_{2,\phi_x}(x,y) \left(\left\{ \cos \theta_y \sin \theta_x \cos(\phi_y - \phi_x) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \sin(\theta_y) \cos(\theta_x) \right\} m_\phi(y) - \sin(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y) m_\theta(y) \right) \sigma dy = \frac{\sigma}{2} m_\phi(x), \quad (33) \\
& - \frac{1}{r_x \sin \theta_x} \int_{\Gamma} \left(\frac{G_{1,\phi_x}(x,y)}{i\omega\mu_1} + \frac{G_{2,\phi_x}(x,y)}{i\omega\mu_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta} (m_\theta(y) \sin \theta_y) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial m_\phi(y)}{\partial \phi} \right) dy + \int_{\Gamma} \left(k_1^2 \Phi_1(x,y) + k_2^2 \Phi_2(x,y) \right) \left(\cos(\theta_y) \sin(\phi_y - \phi_x) m_\theta(y) + \right. \\
& \quad \left. + \cos(\phi_y - \phi_x) m_\phi(y) \right) dy - \int_{\Gamma} \frac{1}{r_x} \left(G_{1,\theta_x}(x,y) + \right. \\
& \quad \left. + G_{2,\theta_x}(x,y) \right) \left(\left\{ \cos(\theta_y) \sin(\theta_x) \cos(\phi_y - \phi_x) - \sin(\theta_y) \cos(\theta_x) \right\} j_\theta(y) + \right. \\
& \quad \left. + \sin(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y) j_\phi(y) \right) dy - \\
& - \int_{\Gamma} \frac{1}{r_x} G_{2,\theta_x}(x,y) \left(\left\{ \cos(\theta_y) \sin(\theta_x) \cos(\phi_y - \phi_x) - \sin(\theta_y) \cos(\theta_x) \right\} m_\phi(y) - \right. \\
& \quad \left. - \sin(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y) m_\theta(y) \right) \sigma dy = -\frac{\sigma}{2} m_\theta(x). \quad (34)
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили систему интегральных уравнений (31)–(34) в сферической системе координат.

Ядра этих уравнений имеют сингулярную особенность. Дополнительную трудность при решении уравнений представляет наличие неподвижной

особенности в точках $\theta_x = 0$, $\theta_x = \pi$, $\theta_y = 0$, $\theta_y = \pi$. От этих особенностей можно избавиться введением соответствующих базисных функций, обращающихся в 0 в этих точках, и умножением уравнений на множитель $\sin \theta_x$.

Отметим, что в системе (31)–(34) проводимость может быть как линейной, так и нелинейной функцией. В нелинейном случае она имеет вид

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_3 |\mathbf{m}|^2. \quad (35)$$

Система сингулярных интегральных уравнений (31)–(34) может решаться численно известными методами Галеркина или коллокации (см., например, [19]).

Для решения задачи об электромагнитных колебаниях необходимо найти нетривиальные решения системы (31)–(34) относительно комплексного спектрального параметра – частоты ω . Решения могут существовать при комплексных ω с отрицательной мнимой частью [2]. Эти решения имеют физический смысл резонансов (резонансных частот).

Заметим также, что система (31)–(34) описывает и решения задачи дифракции падающей электромагнитной волны на диэлектрический шар, покрытый слоем графена, но в этом случае следует добавить правую часть в соответствии с падающей волной.

Заключение

Рассмотрена векторная задача сопряжения об электромагнитных колебаниях диэлектрического шара с графеновым покрытием с учетом нелинейности графена. Выполнена постановка задачи и с помощью формул Стрэттона – Чу получена векторная система интегральных уравнений на поверхности шара (на сфере). В сферической системе координат выполнены преобразования дифференциальных и интегральных операторов для получения системы, состоящей из четырех скалярных уравнений. Получена и проанализирована система скалярных сингулярных интегральных уравнений на сфере в сферических координатах, которую в дальнейшем можно решать численно известными методами.

Список литературы

1. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М. : Наука, 1973. 408 с.
2. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М. : Мир, 1984. 472 с.
3. Jean-Claude Nedelec. Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral Representations for Harmonic Problems. Springer Science+Business Media, 2001. 329 p.
4. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. : Мир, 1987. 311 с.
5. Colton D., Kress R. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. New York : Springer Science+Business Media, 2013. 418 p.
6. Смирнов Ю. Г., Кондырев О. В. О фредгольмовости и разрешимости системы интегральных уравнений в задаче сопряжения для уравнения Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59, № 8. С. 1089–1097. doi: 10.31857/S0374064123080083

7. Смирнов Ю. Г., Тихов С. В. Распространение электромагнитных ТЕ- и ТМ-волн в плоском волноводе, покрытом графеном, с учетом нелинейности // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2023. № 4. С. 70–79. doi: 10.18469/1810-3189.2023.26.4.70-79
8. Смирнов Ю. Г. О фредгольмовости системы интегральных уравнений в задаче о распространении электромагнитных волн в стержне, покрытом графеном // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 3. С. 74–86. doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-6
9. Smirnov Yu. G., Tikhov S. V. On the Ability of TE- and TM-waves Propagation in a Dielectric Layer Covered with Nonlinear Graphene // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, № 11. P. 390–403. doi: 10.1134/S1995080223110380
10. Smirnov Y. G., Smolkin E. Y. On the Existence of an Infinite Spectrum of Damped Leaky TE-Polarized Waves in an Open Inhomogeneous Cylindrical Metal–Dielectric Waveguide Coated with a Graphene Layer // Differential Equations. 2023. Vol. 59, № 9. P. 1193–1198. doi: 10.1134/S0012266123090057
11. Smolkin E. Y., Smirnov Y. G. Numerical Study of the Spectrum of TE-Polarized Electromagnetic Waves of a Goubau Line Coated with Graphene // Photonics. 2023. Vol. 10. P. 1297. doi: 10.3390/photonics10121297
12. Smirnov Yu. G., Smolkin E. G. The Method of Integral Variational Relations in the Problem of Eigenwaves of a Plane Dielectric Layer Coated with Graphene // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, № 9. P. 4070–4078. doi: 10.1134/S1995080223090408
13. Smirnov Y. G., Tikhov S. V. The Nonlinear Eigenvalue Problem of Electromagnetic Wave Propagation in a Dielectric Layer Covered with Graphene // Photonics. 2023. Vol. 10. P. 523. doi: 10.3390/photonics10050523
14. Mikhailov S. A. Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene // Physical Review B. 2016. Vol. 93, № 8. P. 085403. doi: 10.1103/PhysRevB.93.085403
15. Hanson G. W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene // Journal of Applied Physics. 2008. Vol. 103, № 6. P. 064302. doi: 10.1063/1.2891452
16. Смирнов Ю. Г., Кондырев О. В. Интегро-дифференциальные уравнения в задаче рассеяния электромагнитных волн на диэлектрическом теле, покрытом графеном // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 9. С. 1089–1097. doi: 10.31857/S0374064124090053
17. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М. : Изд-во ИПРЖР, 1996. 176 с.
18. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М. : Наука, 1977. 831 с.
19. Mikhlin S. G., Prossdorff S. Singular Integral Operators. Springer, 1986. 528 p.

References

1. Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki = Boundary value problems of mathematical physics*. Moscow: Nauka, 1973:408. (In Russ.)
2. Sanches-Palensiya E. *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy = Inhomogeneous media and the theory of oscillations*. Moscow: Mir, 1984:472. (In Russ.)
3. Jean-Claude Nedelec. *Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral Representations for Harmonic Problems*. Springer Science+Business Media, 2001:329.
4. Colton D., Kress R. *Metody integral'nykh uravneniy v teorii rasseyaniya = Methods of integral equations in scattering theory*. Moscow: Mir, 1987:311. (In Russ.)
5. Colton D., Kress R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. New York: Springer Science+Business Media, 2013:418.
6. Smirnov Yu.G., Kondyrev O.V. On the Fredholm property and solvability of the system of integral equations in the conjugation problem for the Helmholtz equation. *Different-*

- sial'nye uravneniya = Differential equations*. 2023;59(8):1089–1097. (In Russ.). doi: 10.31857/S0374064123080083
7. Smirnov Yu.G., Tikhov S.V. Propagation of electromagnetic TE and TM waves in a graphene-coated planar waveguide taking into account nonlinearity. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy = Physics of wave processes and radio engineering systems*. 2023;(4):70–79. (In Russ.). doi: 10.18469/1810-3189.2023.26.4.70-79
 8. Smirnov Yu.G. On the Fredholm property of a system of integral equations in the problem of electromagnetic wave propagation in a graphene-coated rod. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko- matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(3):74–86. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-6
 9. Smirnov Yu.G., Tikhov S.V. On the Ability of TE- and TM-waves Propagation in a Dielectric Layer Covered with Nonlinear Graphene. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(11):390–403. doi: 10.1134/S1995080223110380
 10. Smirnov Y.G., Smolkin E.Y. On the Existence of an Infinite Spectrum of Damped Leaky TE-Polarized Waves in an Open Inhomogeneous Cylindrical Metal–Dielectric Waveguide Coated with a Graphene Layer. *Differential Equations*. 2023;59(9):1193–1198. doi: 10.1134/S0012266123090057
 11. Smolkin E.Y., Smirnov Y.G. Numerical Study of the Spectrum of TE-Polarized Electromagnetic Waves of a Goubau Line Coated with Graphene. *Photonics*. 2023;10:1297. doi: 10.3390/photonics10121297
 12. Smirnov Yu.G., Smolkin E.G. The Method of Integral Variational Relations in the Problem of Eigenwaves of a Plane Dielectric Layer Coated with Graphene. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(9):4070–4078. doi: 10.1134/S1995080223090408
 13. Smirnov Y.G., Tikhov S.V. The Nonlinear Eigenvalue Problem of Electromagnetic Wave Propagation in a Dielectric Layer Covered with Graphene. *Photonics*. 2023;10:523. doi: 10.3390/photonics10050523
 14. Mikhailov S.A. Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene. *Physical Review B*. 2016;93(8):085403. doi: 10.1103/PhysRevB.93.085403
 15. Hanson G.W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene. *Journal of Applied Physics*. 2008;103(6):064302. doi: 10.1063/1.2891452
 16. Smirnov Yu.G., Kondyrev O.V. Integro-differential equations in the problem of scattering of electromagnetic waves on a dielectric body covered with graphene. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2024;60(9):1089–1097. (In Russ.). doi: 10.31857/S0374064124090053
 17. Il'inskiy A.S., Smirnov Yu.G. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na provodyashchikh tonkikh ekranakh = Diffraction of electromagnetic waves on conducting thin screens*. Moscow: Izd-vo IPRZhR, 1996:176. (In Russ.)
 18. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov) = Diffraction of electromagnetic waves on conducting thin screens*. Moscow: Nauka, 1977:831. (In Russ.)
 19. Mikhlin S.G., Prossdorff S. *Singular Integral Operators*. Springer, 1986:528.

Информация об авторах / Information about the authors

Юрий Геннадьевич Смирнов

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Yuriy G. Smirnov

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of the
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Олег Владимирович Кондырев
аспирант, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: kow20002204@mail.ru

Oleg V. Kondyrev
Postgraduate student,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 03.09.2024

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 01.10.2024

Принята к публикации / Accepted 21.10.2024